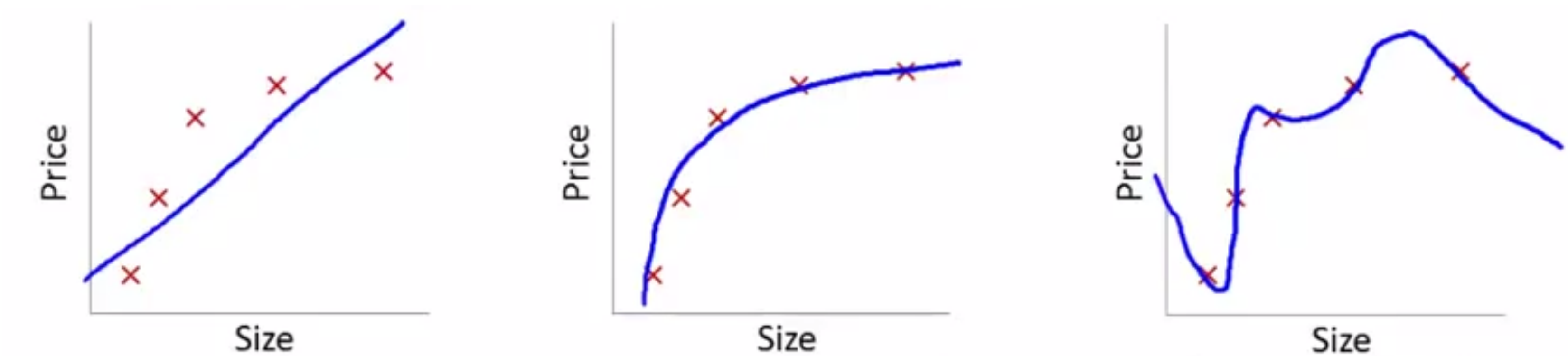
Regularização

Prof.: Eric A. Antonelo

Slides baseados no curso de *Machine Learning* de Andrew Ng

DAS-UFSC

Exemplo: Regressão linear

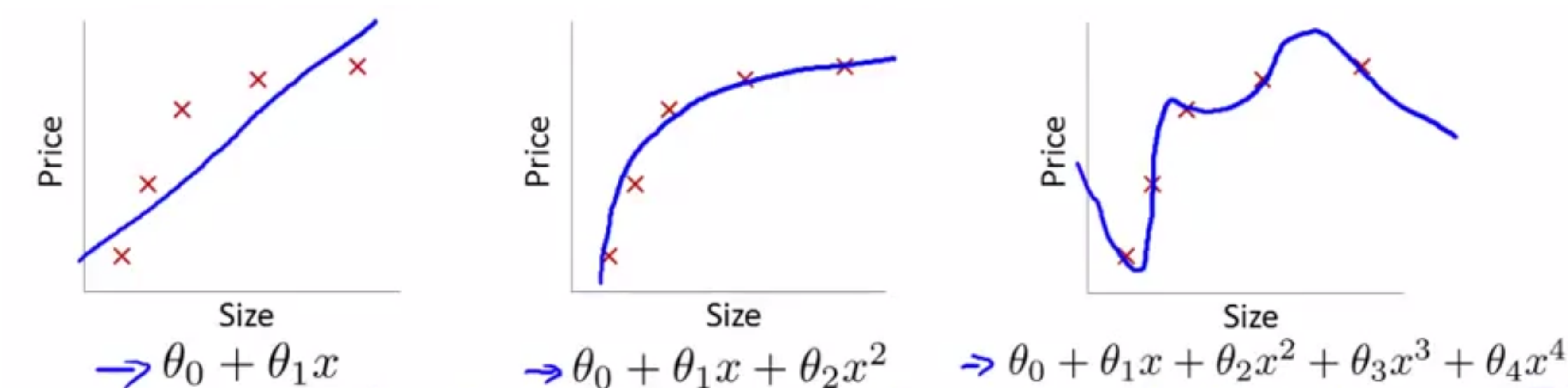


$\theta_0 + \theta_1 x$

$\theta_0 + \theta_1 x + \theta_2 x^2$

$\theta_0 + \theta_1 x + \theta_2 x^2 + \theta_3 x^3 + \theta_4 x^4$

Exemplo: Regressão linear



underfit

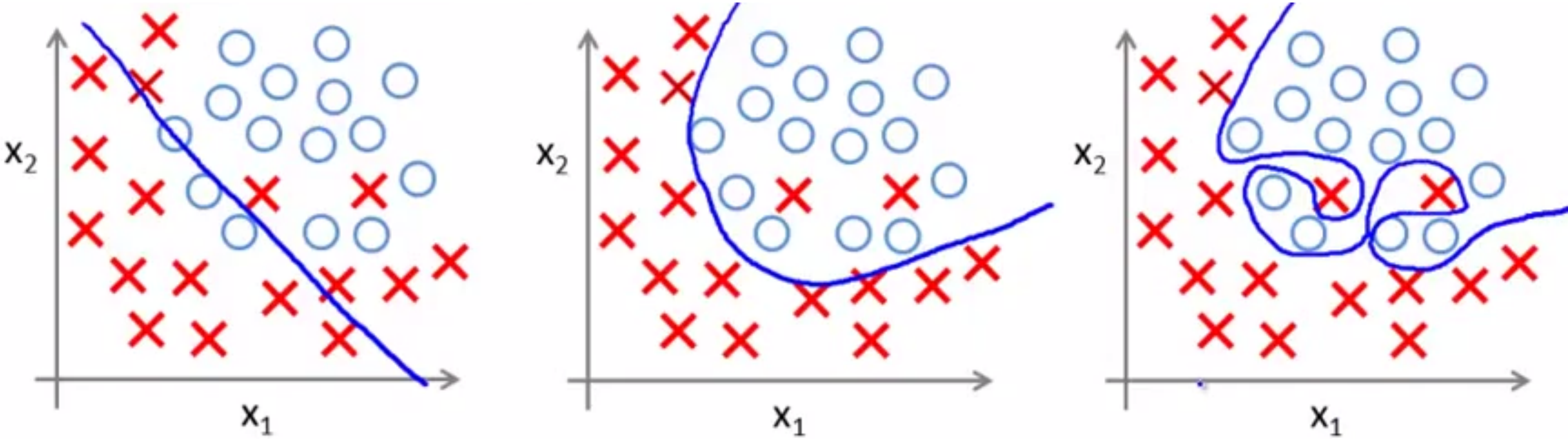
"bias grande"

"overfit"

"variância grande"

Overfitting: Se temos muitos termos não-lineares, a hipótese a ser aprendida pode aproximar o conjunto de treinamento muito bem, mas sua capacidade de generalização pode ser diminuída.

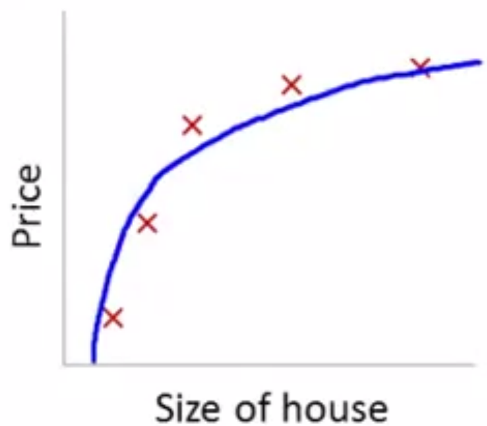
Exemplo: Regressão linear



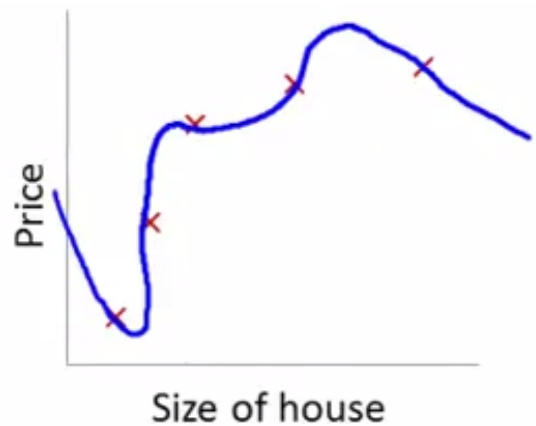
O Que fazer?

- Reduzir número de termos (ou variáveis de entrada)
  - Manualmente
  - Algoritmo de seleção de modelo
- Regularização
  - Manter todos os termos, mas reduzir a magnitude/valor dos parâmetros

Função de custo: Intuição



$$\theta_0 + \theta_1 x + \theta_2 x^2$$



$$\theta_0 + \theta_1 x + \theta_2 x^2 + \theta_3 x^3 + \theta_4 x^4$$

$$\min_{\theta} \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{m} (h_\theta(x^{(i)}) - y^{(i)})^2$$

Penalizar parâmetros

Regularização

- Valores pequenos para $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n$
  - Hipótese mais "simples"
  - Menos provável ocorrer "overfitting"
- Exemplo
  - 100 termos
  - 100 parâmetros

Regularização

- Valores pequenos para $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n$
  - Hipótese mais "simples"
  - Menos provável ocorrer "overfitting"
- Exemplo
  - 100 termos
  - 100 parâmetros

Parâmetro de regularização

$$J(\theta) = \frac{1}{2m}\left[\sum_{i=1}^{m}(h_\theta(x^{(i)}) - y^{(i)})^2 + \lambda \sum_{j=1}^{n} \theta_j^2\right]$$

- O que acontece quando o valor de parâmetro de regularização é muito alto?

$$J(\theta) = \frac{1}{2m}\left[\sum_{i=1}^{m}(h_\theta(x^{(i)}) - y^{(i)})^2 + \lambda \sum_{j=1}^{n} \theta_j^2\right]$$

Método do descenso do gradiente

Repeat $\{$

$$\theta_j := \theta_j - \alpha \quad \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(h_\theta(x^{(i)}) - y^{(i)})x_j^{(i)}$$

$$(j = 0, 1, 2, 3, \ldots, n)$$

$\}$

Método do descenso do gradiente

Repeat $\{$

$$\theta_0 := \theta_0 - \alpha \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (h_\theta(x^{(i)}) - y^{(i)}) x_0^{(i)}$$

$$\theta_j := \theta_j - \alpha \quad \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (h_\theta(x^{(i)}) - y^{(i)}) x_j^{(i)}$$

$$(j = \cancel{0}, \underline{1, 2, 3, \ldots, n})$$

$\}$

Método do descenso do gradiente

Repeat $\{$

$$\theta_0 := \theta_0 - \alpha \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (h_\theta(x^{(i)}) - y^{(i)}) x_0^{(i)}$$

$$\theta_j := \theta_j - \alpha \left[\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (h_\theta(x^{(i)}) - y^{(i)}) x_j^{(i)} + \frac{\lambda}{m} \theta_j \right]$$

$$(j = \cancel{0}, \underline{1, 2, 3, \ldots, n})$$

$\}$

Equação Normal

$$X = \begin{bmatrix} (x^{(1)})^T \\ \vdots \\ (x^{(m)})^T \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} y^{(1)} \\ \vdots \\ y^{(m)} \end{bmatrix}$$

$$\min_{\theta} J(\theta)$$

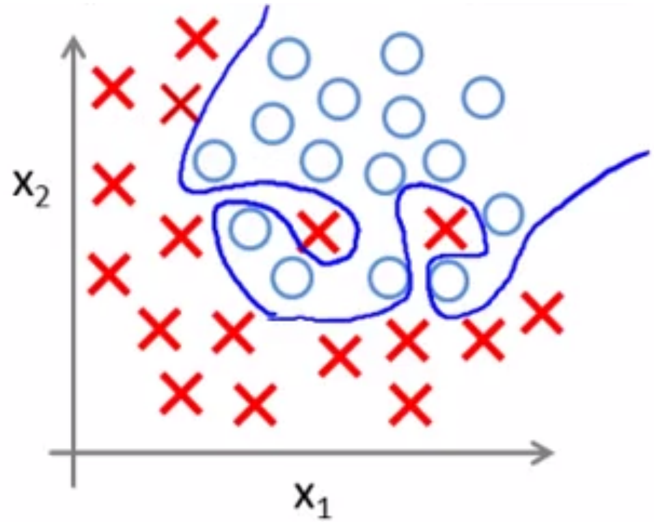
Equação Normal

$$X = \begin{bmatrix} (x^{(1)})^T \\ \vdots \\ (x^{(m)})^T \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} y^{(1)} \\ \vdots \\ y^{(m)} \end{bmatrix}$$

$$\min_{\theta} J(\theta)$$

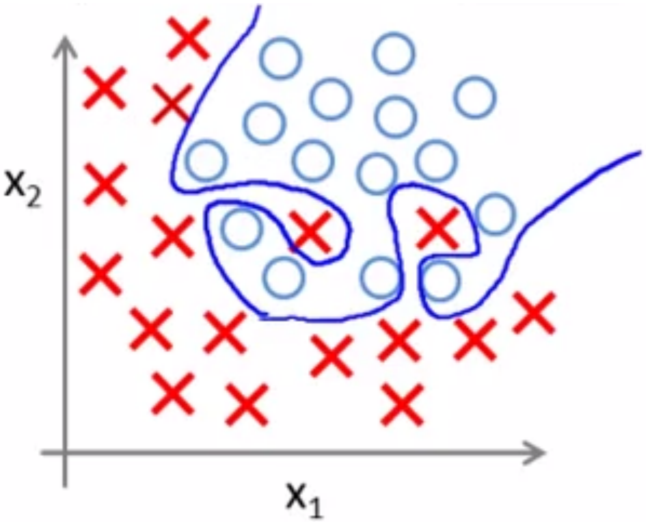
$$\theta = \left(X^T X + \lambda \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} X^T y$$

Regressão logística “regularizada”



$$h_\theta(x) = g(\theta_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_1^2 + \theta_3 x_1^2 x_2 + \theta_4 x_1^2 x_2^2 + \theta_5 x_1^2 x_2^3 + \ldots)$$

Regressão logística “regularizada”



$$h_\theta(x) = g(\theta_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_1^2 + \theta_3 x_1^2 x_2 + \theta_4 x_1^2 x_2^2 + \theta_5 x_1^2 x_2^3 + \dots)$$

Função de custo:

$$J(\theta) = -\left[\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y^{(i)} \log h_\theta(x^{(i)}) + (1 - y^{(i)}) \log (1 - h_\theta(x^{(i)}))\right]$$

$$+ \frac{\lambda}{2m} \sum_{j=1}^{n} \theta_j^2$$

Método do descenso do gradiente

Repeat $\{$

$$\theta_0 := \theta_0 - \alpha \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (h_\theta(x^{(i)}) - y^{(i)}) x_0^{(i)}$$

$$\theta_j := \theta_j - \alpha \left[\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (h_\theta(x^{(i)}) - y^{(i)}) x_j^{(i)} + \frac{\lambda}{m} \theta_j \right]$$

$$(j = \cancel{0}, \underbrace{1, 2, 3, \ldots, n}_{\theta_1 \ldots \theta_n})$$

$\}$